ACCADEMIA DI SCIENZE LETTERE E ARTI
DI MODENA

CARLO FELICE MANARA

Osservazioni sulla geometria delle equazioni differenziali nel piano complesso

SOCIETÀ TIPOGRAFICA MODENESE — EDITRICE IN MODENA
— 1955 —

ACCADEMIA DI SCIENZE LETTERE E ARTI
DI MODENA

CARLO FELICE MANARA

Osservazioni sulla geometria delle equazioni differenziali nel piano complesso

SOCIETÀ TIPOGRAFICA MODENESE — EDITRICE IN MODENA
— 1955 —

Estratto dagli *Atti e Memorie della Accademia di Scienze, Lettere e Arti di Modena*, Serie V, Vol. XIII, 1955

CARLO FELICE MANARA

OSSERVAZIONI SULLA GEOMETRIA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI NEL PIANO COMPLESSO

RIASSUNTO — Si dà una trattazione unitaria della Geometria Differenziale Metrica e Simile delle curve piane mediante la normalizzazione di una opportuna equazione differenziale interpretata nel piano complesso.

§ 1 - Scopo del presente lavoro è la impostazione sotto forma unitaria della Geometria Differenziale tanto Metrica che Simile delle curve piane. E' noto che V. E. Galafassi (*) si è occupato recentemente della ricerca metodica di invarianti differenziali delle curve piane di fronte a trasformazioni per similitudine, cioè di una Geometria Differenziale Simile delle curve piane.

Ora è noto che il gruppo delle similitudini piane ammette una immediata espressione analitica quando si facciano corrispondere i punti del piano ai numeri complessi, essendo allora rappresentato dal gruppo delle trasformazioni lineari intere della variabile complessa. Una impostazione siffatta permette di ottenere nel modo più semplice le proprietà differenziali delle curve piane tanto in Geometria Metrica che in Geometria Simile e ciò col porre a base della trattazione una equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine che abbia come integrale una funzione complessa di variabile reale definita a meno di una trasformazione lineare intera.

La presente trattazione ha qualche analogia con le trattazioni classiche della Geometria Proiettiva Differenziale delle curve definite mediante equazioni differenziali lineari; si può

(*) Cfr. V. E. Galafassi. *Di una geometria differenziale simile nello studio delle curve piane.* Rend. del Sem. Matem. della Università di Torino, vol. IX.

pensare che, con opportune modifiche, un analogo punto di vista possa essere adottato anche per la risoluzione di problemi di Geometria Differenziale relativi alle curve dello spazio.

§ 2 - Indichiamo con

$$z(t) = x(t) + i\, y(t)$$

una funzione complessa della variabile reale t; indichiamo poi con

$$\begin{cases} \dot{z} = \dot{x} + i\,\dot{y} \\ \ddot{z} = \ddot{x} + i\,\ddot{y} \\ \dddot{z} = \dddot{x} + i\,\dddot{y} \end{cases}$$

le derivate rispettivamente prima, seconda e terza della z rispetto alla t.

Sia ora data una funzione

$$w(t) = u(t) + i\, v(t)$$

complessa della variabile reale t, funzione che supporremo definita e continua in un intervallo

(1) $$a \leq t \leq b$$

della variabile indipendente; in tutta la presente trattazione supporremo di considerare soltanto valori di t che appartengano all'intervallo (1) nel quale la w possiede le proprietà che abbiamo enumerate.

E' noto che la equazione differenziale

(2) $$\ddot{z} = w\,\dot{z}$$

definisce la z come funzione della t a meno di una trasformazione lineare intera del tipo

(3) $$z_1 = a\,z + b$$

con a e b costanti complesse.

Se si interpreta geometricamente il numero complesso z come un punto nel piano di coordinate cartesiane ortogonali x ed y, è noto allora che la (3) definisce la più generale trasformazione per similitudine in detto piano e quindi la (2) definisce una curva piana a meno di similitudini.

Con facili calcoli si hanno le relazioni che legano le funzioni u(t) e v(t) (rispettivamente parte reale e coefficiente dell'immaginario della w(t)) alle derivate di z(t):

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\dot{x}\,\ddot{x} + \dot{y}\,\ddot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dfrac{d}{dt} \log\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\[2ex] v = \dfrac{\dot{x}\,\ddot{y} - \ddot{x}\,\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dfrac{d}{dt} \operatorname{arctg} \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} \end{cases}.$$

In forza delle ipotesi che abbiamo enunciate per la w(t) possiamo quindi anzitutto assicurare che per tutti i valori di t considerati si avrà

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$$

La determinazione della curva descritta da z(t) si ha dalla integrazione del sistema (4); il risultato di tale integrazione può essere espresso sinteticamente dalla formula:

$$(5)\qquad z = \int e^{\int w\,dt + c_1}\,dt + c_2$$

in cui c_1 e c_2 sono costanti di integrazione in generale complesse.

In base ad elementari proprietà delle funzioni che compaiono nella (5) è noto che il variare c_1 nella (5) stessa equivale ad operare nel piano della z una rotomotetia ed il variare c_2 equivale ad operare una traslazione.

Pertanto con la variazione delle costanti di integrazione c_1 e c_2 si ottiene la più generale trasformazione per similitudine del piano z.

Pensiamo ora di cambiare la variabile indipendente, scegliendo un nuovo parametro τ funzione continua, derivabile ed univocamente invertibile di t nell'intervallo (1) considerato.

Indichiamo brevemente con $\dot{\tau}$ e $\ddot{\tau}$ le derivate prima e seconda della τ rispetto a t.

Nel nuovo parametro τ la equazione differenziale (2) assumerà la forma

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = W \frac{dz}{d\tau} \tag{6}$$

in cui, come si verifica facilmente, la funzione W ha la forma

$$W = \frac{u}{\dot{\tau}} - \frac{\ddot{\tau}}{\dot{\tau}^2} + i \frac{v}{\dot{\tau}} \tag{7}$$

Orbene si verifica facilmente che la ordinaria teoria metrica e la teoria differenziale simile delle curve piane si ottengono entrambe mediante opportuna scelta del nuovo parametro τ, scelta che viene fatta imponendo che la funzione W abbia determinate e opportune caratteristiche analitiche cioè, in altre parole, imponendo una opportuna « normalizzazione » della equazione differenziale (2).

Eseguiremo nel prossimo paragrafo i ragionamenti ed i calcoli che conducono alla ordinaria teoria metrica, e svolgeremo nel § 4 i ragionamenti ed i calcoli che ci condurranno alla teoria differenziale simile delle curve piane secondo Galafassi.

§ 3 - Scegliamo dunque il parametro in modo che la funzione W che compare nella (6) sia puramente immaginaria e chiamiamo s(t) il nuovo parametro fissato con questa particolare condizione. In base alla (7) si ha che il parametro s così definito deve soddisfare alla condizione

$$\frac{\ddot{s}}{\dot{s}} = u(t)$$

Dal confronto con la prima delle (4) si ha che, con opportuna scelta di una costante di integrazione, si può ottenere

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt \tag{8}$$

In base alla condizione posta si ha ora che la equazione (6) assume la forma

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{i}{\rho(s)} \frac{dz}{ds} \tag{9}$$

essendo $\rho(s)$ una funzione (puramente reale) della variabile s.

La (9) dà immediatamente, con una prima integrazione

$$\frac{dz}{ds} = e^{i\left[\int \frac{ds}{\rho} + c_1\right]} \tag{10}$$

dove c_1 è una costante di integrazione che, in questo caso particolare, risulta essere puramente reale.

Infine una seconda integrazione dà

$$z = \int e^{i\left[\int \frac{ds}{\rho} + c_1\right]} ds + c_2 \tag{11}$$

essendo c_2 un'altra costante di integrazione, complessa.

La (11) dà in forma esplicita la z in funzione di s quando sia nota la funzione $\rho(s)$ e mostra che, in questo caso particolare, il variare della costante c_1 implica l'eseguire nel piano z una rotazione, mentre il variare della costante c_2 implica l'eseguire una traslazione. Pertanto — sempre in questo caso — la (11) definisce la curva $z(s)$ a meno di congruenze: si ottiene così la ordinaria teoria differenziale metrica delle curve piane. Il parametro s così definito è un invariante che può essere chiamato « arco » della curva e la funzione $1/\rho(s)$ può essere chiamata « curvatura » della curva stessa.

Il significato geometrico di s si ha immediatamente dalla (10) che dà

$$ds = |dz|$$

il che assicura che l'arco ora definito coincide con quello che viene abitualmente così chiamato nelle ordinarie trattazioni; la (8) fornisce poi la espressione analitica esplicita di ds.

Per quanto riguarda infine il significato geometrico della funzione $1/\rho(s)$, esso si ottiene immediatamente dalla (10): $1/\rho(s)$ risulta la derivata (eseguita rispetto al parametro s) dell'argomento del vettore tangente alla curva.

Come avevamo annunciato si ritrova così per questa via l'intera teoria differenziale metrica delle curve piane.

§ 4 - Imponiamo ora che la funzione W della equazione (6) abbia coefficiente dell'immaginario uguale all'unità e chiamiamo ϑ il nuovo parametro che si ottiene con questa condizione. Si avrà dunque per la (7)

$$\frac{d\theta}{dt} = v(t)$$

Ricordando la seconda delle (4) si ha che il parametro ϑ qui definito è l'angolo formato dalla tangente alla curva $z(t)$ con una retta fissa.

In base alla condizione ora posta la equazione (6) assume la forma

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = (\gamma(\theta) + i) \frac{dz}{d\theta} \tag{12}$$

essendo $\gamma(\theta)$ una funzione reale del parametro θ, funzione che potremo indicare, seguendo Galafassi, col nome di « curvatura simile » della curva definita dalla (12).

In forza di quanto è stato detto al § 2 la conoscenza di $\gamma(\theta)$ determina la $z(\theta)$ a meno di similitudini nel piano z.

La (7) permette poi agevolmente di calcolare la γ come funzione di t, avendosi

$$\gamma(t) = 3\,\frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(\dot{x}\dddot{y} - \dot{y}\dddot{x})}{(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})^2}$$

Inoltre le (4) e i risultati del precedente paragrafo dànno immediatamente il collegamento degli invarianti θ e γ ora definiti con quelli della ordinaria teoria metrica.

Si ha infatti

$$\begin{cases} d\theta = ds/\rho \\ \gamma = d\rho/ds \end{cases}$$

come è del resto già ampiamento noto.